8-Vertex ModelとAnisotropic Heisenberg ModelのBaxterによる厳密解 (ハミルトニアンの定義とスペクトル)

五十嵐, 儀孝

数理解析研究所講究録
159巻 1972年 52-68

8-vertex model と Anisotropic Heisenberg model の Baxter による厳密解

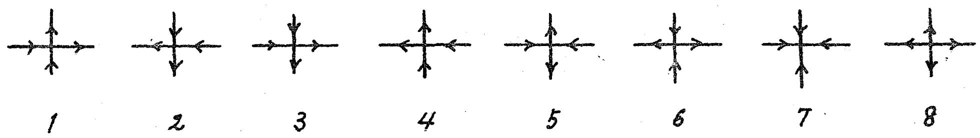
東大　物理　五十嵐儀孝

§0. Introduction

統計力学における多体問題としての厳密解は数少なく，一次元，二次元の Ising model（古典的スピン），一次元 x-y 型 Heisenberg model（量子論的）等の熱力学極限において解かれている程度である。[0] 本稿では最近得られた標題の模型の解説を純数学的な厳密さを配慮せずにします。[1]

Baxter の解法は，これまでこの種の問題に用いられて来た Bethe-ansatz を基にせずに[0]，解いた点に重要さがあり，逆に Bethe-ansatz が特殊な場合として導出できる事で仮定の正当性を示したことになっている。特に Anisotropic 模型では $\sum_i \sigma_i^z$ が保存しない事になっており，Bethe-ansatz は用いられなかった。　　8-vertex model とはトーラス的周期境界条件を付けた，二次元格子 $\mathbb{Z}^2$ 上の各格子点上に状態空間を考え，空間は次の8個の状態で生成するのである。

Fig-1.



この状態は種々の物理的問題で異なるが，例えば ice 模型の場合は，格子点に酸素が固定されていて，4つのプロトンが格子点に近いか遠いかを矢印で示していると考えてよい。その際各格子点に状態に応じた energy ε_j を与えれば系の Hamiltonian は $\sum_{j=1}^{8} N_j \varepsilon_j$ （N_j は j-state にある格子点の総数）で与えられ，partition function は，

$$Z=\sum \exp\left[-\beta\sum_{j=1}^{8} N_j\ \varepsilon_j\right]. \qquad (1)$$

Σ は状態空間の直積空間上での全ての許される系全体の状態に関する和を表わす。

物理的に興味があるのは Z から定義される自由エネルギー，

$$-f=\lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty}\beta^{-1}\,(MN)^{-1}\,\ln Z \qquad (2)$$

であり，この熱力学的極限量において有限に残る部分が問題になる。始めは格子の大きさ $M\times N$ は有限にして出発する。

Anisotropic Heisenberg 模形は一次元的な Z 上の格子点に，SU（2）の generator を作用素として，それの eigen vector で生成される空間を与える。そして系全体の Hamiltonian を次の様に定義する。

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{J=1}^{N}\{ J_x \sigma_J^1 \sigma_{J+1}^1 + J_y \sigma_J^2 \sigma_{J+1}^2 + J_z \sigma_J^3 \sigma_{J+1}^3 \} .$$

$$\sigma_{N+1}^i \equiv \sigma_1^i . \tag{3}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

σはPauli matrixで表現してあり，これは強磁性体内のスピン自由度を表わす作用素である。なおJ_x，J_y，J_zは任意の値をとる場合をAnisotropicと言う。

8 vertex modelでの最大固有値問題とAnisotropic modelの最小固有値問題が密接に関係しており，前者を解くことにより，量子論的な後者の問題が解ける所が，これまでの場合と逆になっている点でもある。
Baxterの論文はかなり長いものであり，物理数学的計算がかなりの部分を占めてあるので詳細は原論文を参照していただく事にして，ここでは証明の要点を示すことにします。

§1. 8-vertexのTransfer Matrixによる解法

空間のParity変換に対して8-vertexのHamiltonianが不変である事を考えれば，$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$，$\varepsilon_3 = \varepsilon_4$，さらに各格子点での回転不変性から，$\varepsilon_5 = \varepsilon_6$，$\varepsilon_7 = \varepsilon_8$を仮定できる。
新しいパラメーターを次の様に定義する。

$$\omega_j = \exp(-\beta \varepsilon_j) .$$

$$\omega_1 = \omega_2 = a\,,\quad \omega_3 = \omega_4 = b\,,\quad \omega_5 = \omega_6 = c\,,\quad \omega_7 = \omega_8 = d\,. \tag{3}$$

$$W_1 = \tfrac{1}{2}(c+d)\,,\ W_2 = \tfrac{1}{2}(c-d)\,,\ W_3 = \tfrac{1}{2}(a-b)\,,\ W_4 = \tfrac{1}{2}(a+b)\,.$$

a). Transfer Matrix と State の導入

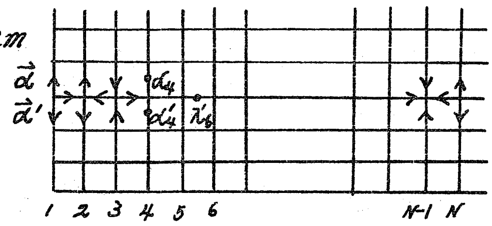


Fig-2

site problem から bond problem に移り，格子点を結ぶ線分上の矢印に注目し，上方と右方に対し＋，下方と左方に対して－なる符号を与える。

今 $\vec{\alpha}$ 行に注目すれば，この状態は α_1, α_2, ……α_{N-1}, α_N が＋，－のいずれかをとるかにより 2^N 個の状態が存在し，それのある特定の状態を $\vec{\alpha}$ で記する。相隣接する $\vec{\alpha}$ 行と $\vec{\alpha}'$ 行を考えそれにより定まる $2^N \times 2^N$ の行列 T を定義する。

$$T_{\vec{\alpha},\vec{\alpha}'} = \sum \exp\left(-\beta \sum_{j=1}^{8} n_j \varepsilon_j\right)$$

Σ：$\vec{\alpha}$ と $\vec{\alpha}'$ 行間の水平 bond の許された配位矢印に関する総和を取る。

n_j：上記のある配位で，この水平な bond の行上の格子点での j 形の vertex に相当するものの総和。

すると明らかに，(1)で定義した分配関数は，

$$Z = \sum_{\{\vec{\alpha}_1\}} \cdots \sum_{\{\vec{\alpha}_M\}} T_{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2} T_{\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3} \cdots T_{\vec{\alpha}_M,\vec{\alpha}_1} = Tr\{\hat{T}^M\}\,. \tag{4}$$

この $\hat{T}$ なる行列を Transfer Matrix と言い，以下の様に重要な役割をする。

b). $\hat{T}$-matrixのSU(2)-generator表現

JとJ+1列の間にある水平bondで$\bar{\alpha}$と$\bar{\alpha}'$にはさまれた場所にあるものの状態をλ_Jで表わすと，新しい$\hat{R}$ matrixで，

$$T_{\bar{\alpha},\bar{\alpha}'} = \sum_{\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_N}\prod_{J=1}^{N} R(\alpha_J,\alpha'_J\,|\,\lambda_J,\lambda_{J+1}) . \qquad (5)$$

ここで$\hat{R}$は許された矢印の配位に対してだけω_jの値をとる様にすれば正確に$\hat{T}$を表現できる。λ_J, λ_{J+1}を行，列の符号と考え，$\lambda_J=+,-$；$\lambda_{J+1}=+,-$に応じた2×2 matrix $R(\alpha,\alpha')$を次の様に定めればよい。（Fig-1とε_jの定義をくらべて）

$$\hat{R}(+,+) = \begin{array}{c|cc} \lambda_J \backslash \lambda_{J+1} & + & - \\ \hline + & a & 0 \\ - & 0 & b \end{array}, \quad \hat{R}(+,-) = \begin{array}{c|cc} & + & - \\ \hline + & 0 & d \\ - & c & 0 \end{array}.$$

$$\hat{R}(-,+) = \begin{array}{c|cc} & + & - \\ \hline + & 0 & c \\ - & d & 0 \end{array}, \quad \hat{R}(-,-) = \begin{array}{c|cc} & + & - \\ \hline + & b & 0 \\ - & 0 & a \end{array}. \qquad (6)$$

Pauli-matrix σでsimpleに表現できて，$\hat{R}$は，

$$R(\alpha,\alpha'\,|\,\lambda,\lambda') = \sum_{j=1}^{4} w_j\, \sigma^{j}_{\alpha,\alpha'}\, \sigma^{j}_{\lambda\lambda'} . \qquad (7)$$

これを用いれば$T_{\bar{\alpha},\bar{\alpha}'}$は，$T_r$を$\lambda_1$に関するものとして，

$$T_{\bar{\alpha},\bar{\alpha}'} = T_r\{\hat{R}(\alpha_1,\alpha_1')\cdots\hat{R}(\alpha_N,\alpha_N')\}, \qquad (8)$$

と表現できる。

したがって$T_{\bar{\alpha},\bar{\alpha}'}$は，$\{\alpha_J\}$と$\{\alpha'_J\}$を与えて，それに応じた$\hat{R}(\alpha,\alpha')$をN個えらび行列の積演算をし（この段階で$\sum_{\lambda_2}\cdots\sum_{\lambda_N}\prod_{J=1}^{N}$演算は完了する点が（6）による表現の利点），$T_r=\sum_{\lambda_1=\lambda_{N+1}}$をとれば得られることになる。

c). *Commuting Condition for $\hat{T}$-matrix.*

(8), (7) により得られる$\hat{T}$と，$W_i \to W_i'$と仮りに変換した場合の$\hat{T}'$が交換するための条件を求める。

$$(\hat{T}\hat{T}')_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} = Tr\{\prod_{J=1}^{N} \hat{S}(\alpha_J,\ \beta_J)\}.$$

$$S^{\alpha\beta}_{\lambda,\mu;\lambda',\mu'} = \sum_{\gamma} R(\alpha,\gamma|\lambda,\lambda')R'(\gamma,\beta|\mu,\mu') \tag{9}$$

$$= \sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} W_j W_k'(\sigma^j\ \sigma^k)_{\alpha\beta}\ \sigma^j_{\lambda\lambda'}\ \sigma^k_{\mu\mu'}.$$

$$(\hat{T}'\hat{T})_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} = Tr\{\prod_{J=1}^{N} \hat{S}'(\alpha_J,\beta_J)\}.$$

$$S'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu;\lambda'\mu'} = \sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} W_j W_k'(\sigma^k\ \sigma^j)_{\alpha\beta}\ \sigma^j_{\lambda\lambda'}\ \sigma^k_{\mu\mu'}. \tag{10}$$

ここで$\prod_{J=1}^{N}$はλ,λ'とμ,μ'に対するmatrixの積をそれぞれ実行しTrは$\sum_{\lambda_1=\lambda_{N+1}}$と$\sum_{\mu_1=\mu_{N+1}}$を行う事を意味する。$Tr_1 A_1 \times Tr_2 A_2 = Tr_{1,2} A_1 \otimes A_2$.
(9), (10)が同一のものになるためには，J-indexに依存しないあるmatrix $\hat{\mathcal{S}}$が存在して，$\hat{S}'(\alpha,\beta) = \hat{\mathcal{S}}\,\hat{S}(\alpha,\beta)\,\hat{\mathcal{S}}^{-1}$
または，$\hat{S}'(\alpha,\beta)\,\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}\,\hat{S}(\alpha,\beta)$ (11)
になれば，Trがあるので十分である。$\hat{\mathcal{S}}$は(9), (10)でλ,λ'とμ,μ'-suffixを交換する作用をするmatrixであればjとkの単なる書き換えによって(9), (10)は同一になる。

$$(\hat{\mathcal{S}})_{\lambda\mu;\lambda'\mu'} = \sum_{j=1}^{4} x_j\,\sigma^j_{\lambda\lambda'}\ \sigma^j_{\mu\mu'} \tag{12}$$

(9), (10)と(11), (12)よりx_jに対する同次方程式をえるが，自明でない解が存在する条件は，

$$\frac{W_j^2 - W_k^2}{W_l^2 - W_m^2} = \frac{W_j'^2 - W_k'^2}{W_l'^2 - W_m'^2} = \frac{x_j^2 - x_k^2}{x_l^2 - x_m^2} = \mathrm{const}\,(j,k,l,m). \tag{13}$$

これは独立な２つの関係式を与え，$w_j^2 = p(\xi - s_j)$，$w_j'^2 = p'(\xi' - s_j)$，$x_j^2 = p''(\xi'' - s_j)$ なる *parametrization* により常に満足される。もとの x_j に対する方程式から，

$$\frac{\partial\xi''/\partial\xi}{\partial\xi''/\partial\xi'} = \frac{-g(\xi')}{g(\xi'')}, \quad g(\xi) = \mathrm{const} \times \prod_{j=1}^{4} (\xi - s_j)^{-1/2} \tag{14}$$

を得るが，$\xi'' \equiv f(v(\xi), v'(\xi'))$ なる関係にあるとし，また $dv/d\xi = g(\xi)$，$dv'/d\xi' = g(\xi')$ とすれば，$f = f(v - v')$ とする事により (14) は満足される。ξ と v の関係式は積分により得られ，$w_j^2 = p(\xi - s_j)$ から，p を消去すれば，

$$W_1 : W_2 : W_3 : W_4 = \frac{cn(v,l)}{cn(\zeta,l)} : \frac{dn(v,l)}{dn(\zeta,l)} : 1 : \frac{sn(v,l)}{sn(v,l)} \tag{15}$$

$$l = \left(\frac{(S_3 - S_2)(S_4 - S_1)}{(S_4 - S_2)(S_3 - S_1)}\right)^{1/2}, \quad sn(\zeta, l) = \left(\frac{S_3 - S_1}{S_4 - S_1}\right)^{1/2}$$

をえる。結局 ζ と l が同じ二つの $\hat{T}$ *matrix* は W_j の比の関係が (15) を満足するならば v が異なっても交換する。

従って $\hat{T}$-*matrix* を対角化する手段が得られたことになる。このことについては d). で述べるとして，(15) は次の様にも表わせる。　$k = 1 - l/1 + l$，$v = iv/1 + k$，$\eta = i\zeta/1 + k$

$$a : b : c : d = sn(v+\eta, k) : sn(v-\eta, k) : sn(2\eta, k) :$$
$$k\, sn(2\eta, k)\, sn(v-\eta, k)\, sn(v+\eta, k)\ . \tag{16}$$

a). $\hat{T}$-matrix に対する方程式

$\hat{T}$-matrix を対角化し固有値を求める手法を Beth仮説に基づく解法との類比によりおこなう。すなわち次の性質をもつ $\hat{Q}$-matrix を求める。

$$\hat{T}(v)\hat{Q}(v) = \phi(v-\eta)\hat{Q}(v+2\eta) + \phi(v+\eta)\hat{Q}(v-2\eta).$$
$$\hat{T}(v)\hat{Q}(v) = \hat{Q}(v)\hat{T}(v). \qquad (17)$$
$$\hat{Q}(u)\hat{Q}(v) = \hat{Q}(v)\hat{Q}(u).$$

$\hat{Q}$を求める詳細は長くなるので大体の所を示すと，まず

$$\hat{T}\hat{Q}_R = \hat{Q}\text{-type} + \hat{Q}\text{-type}, \quad \hat{Q}_R = 2^N \times 2^N \text{ matrix}$$

を仮定し，$[\hat{Q}_R]_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} = Tr\{\prod_{J=1}^{N}\hat{S}(\alpha_J,\beta_J)\}$ の形で求める。$\hat{S}$ は $L\times L$ matrix で Tr はこの行列の suffix に関する $\sum_{m=1}^{L}$ を意味する。すると $[\hat{T}\hat{Q}_R]_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} = Tr\{\prod_{J=1}^{N}\hat{U}(\alpha_J,\beta_J)\}$ となり，$\hat{U}(\alpha,\beta)$ は $2L\times 2L$ matrix であり，適当な $2L\times 2L$ matrix $\hat{M}$ を用いると，

$$\hat{M}^{-1}\hat{U}(\alpha,\beta)\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{A}(\alpha,\beta) & \hat{O} \\ \hat{C}(\alpha,\beta) & \hat{B}(\alpha,\beta) \end{pmatrix}$$

とすることができて

$\hat{T}\hat{Q}_R = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$，$[H_1]_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} = Tr\{\prod_{J=1}^{N}\hat{A}(\alpha_J,\beta_J)\}$ 等の形をうる。

$\hat{S}$，$\hat{A}$，$\hat{B}$ は $L\times L$ matrix で適当な境界条件を matrix の要素に課するとその形は同一の形になり，右の行列形をとる。

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ Z_1 & 0 & Z_{-2} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & Z_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & Z_{1-L} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & Z_{L-1} & Z_L \end{pmatrix}$$

Z_m $(m=1-L,\cdots,L)$ は，

$$\hat{S}(\alpha,\beta)\ :\ Z_m = g(\alpha,\beta,m;v).$$

$$\hat{A}(\alpha,\beta)\ :\ Z_m = \rho\,\Theta(0)H(v-\eta)\Theta(v-\eta)X_m X_{m+1}^{-1}\,g(\alpha,\beta,m;v+2\eta). \qquad (18)$$

$$\hat{B}(\alpha,\beta)\ :\ Z_m = \rho\,\Theta(0)H(v+\eta)\Theta(v-\eta)X_{m+1}X_m^{-1}\,g(\alpha,\beta,m;v-2\eta).$$

$$X_m = \Theta[K+(2m-1)\eta]$$

$$g(+,\beta,m;v) = H(v+K+2m\eta)\tau_{\beta,m}\ ,\ g(-,\beta,m;v) = \Theta(v+K+2m\eta)\tau_{\beta,m}.$$

ここで Θ，H は Jacob の楕円関数で，$sn(u)=k^{-1/2}H(u)/\Theta(u)$ なる関係をもつ。$\tau_{\beta,m}$ は任意な量であり定数としてもよい。

$Q_L(v)\hat{T}(v)$ についても同様に $\hat{Q}_L$ を構成できて，$Q_L(u)Q_R(v)=$ $=Q_R(v)Q_L(u)$ が成り立ち，$\hat{Q}(v)=\hat{Q}_R(v)\hat{Q}_R^{-1}(v_0)=\hat{Q}_L^{-1}(v_0)\hat{Q}_L(v)$，$v_0$: fixed を用いると (17) が成立する。ただし $\phi(v)=\{\rho\Theta(0)H(v)\Theta(v)\}^N$ であり，ρ は規格化定数である。

Θ，H 関数は entire-funct. であり，ϕ，$\hat{Q}$ はやはり entire となるので，(17) より明らかに $\hat{T}(v)$ も v の関数として entire になる。

(17) から，任意の v のある値に対して，$\hat{Q}$，$\hat{T}$ が同時に対角化できて，その固有値を $Q(v)$，$T(v)$ と表わせる表示が存在する。ところで $\hat{T}(u)\hat{T}(v)=\hat{T}(v)\hat{T}(u)$ であったから，他の u の値に対しても，この表示で $\hat{T}(u)$ は対角的で同様に $\hat{Q}(u)$ も対角的になる。この事実を基にして $\hat{T}$ の固有値を求めるのである。

e). $\hat{Q}$ matrix の対角表示

$\hat{T}(v)$, $\hat{Q}(v)$ は次の2個の"量子数"によって部分空間に分割できる。

ν' : あるα(矢印が上向，下向を各縦方向bondに対して指定する状態であった。Fig-2参照)に含まれる下向き矢印の数が even = 0，odd = 1.

ν'' : 格子系の矢印方向の逆転，つまりParity変換に対する$\hat{Q}$，$\hat{T}$の対称 = 0，反対称 = 1，性.

Jacobの楕円関数に関する擬周期性を利用して，ν'，ν''量を$\hat{Q}$の関係に入れる。

$q \equiv \exp(-\pi K'/K)$，K，K'はk，k'を母数とする完全楕円積分とすると擬周期性は，

$$H(u+2K) = -H(u), \quad \Theta(u+2K) = \Theta(u),$$
$$H(u+iK') = i\, q^{-1/4} \exp(-\tfrac{1}{2} i\pi u/K)\, \Theta(u), \tag{19}$$
$$\Theta(u+iK') = i\, q^{-1/4} \exp(-\tfrac{1}{2} i\pi u/K)\, H(u).$$

(18)より $v \to v + 2K$ の変換に際して，$\hat{Q}$を構成する$\hat{S}$の要素 $g(\pm, \beta : m, v)$ は，$g(+; v+2K) = -g(+, v)$，$g(-; v+2K) = g(-, v)$ で上，下方向で符号が異なるので，今Nをevenと仮定すれば $N_\uparrow + N_\downarrow = N$，結局$\nu'$量子数を用いて，

$$\hat{Q}(v+2K) = (-1)^{\nu'}\, \hat{Q}(v) \tag{20}$$

を得る。 次に $v \to v + iK'$ なる変換を考えると，(18)，(19)より $H(\uparrow) \to \Theta(\downarrow)$，$\Theta \to H$ なる変換つまり $+ \to -$；$- \to +$ 方向に変える。例えば，$g(+,\beta,m;v+iK') = H(v+K+iK'+2m\eta) = = i\, q^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\pi i(v+K+2m\eta)/K}\, \Theta(v+K+2m\eta) = i q^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\pi i(v+K+2m\eta)}\, g(-,v)$ などである。したがって $\hat{Q}$ を構成する $\hat{S}$ の具体的表現を用いると，この変換に対して，$\hat{Q}(v+iK') = q^{-N/4}\, e^{-\frac{1}{2}iN\pi v K^{-1}}\, Q(v)\chi(v)$ をうるが，$\chi(v)$ は，$[g(+,v)]^m[g(-,v)]^{N-m} / [g(-,v)]^m[g(+,v)]^{N-m}$ の様な形であり，$\chi(v+2K) = \chi(v)$，$\chi(v+iK') = \chi^{-1}(v)$，$\chi(v+2iK') = \chi(v)$ なる周期性を有している関数であるが，$v \to v-iK'$ と $v \to v+iK'$ なる2変換をして得る $\hat{Q}$ の関係式と $\hat{Q}(v+2iK') = q^{-N} e^{-\pi i v N K^{-1}}\, \hat{Q}(v)$ を用いると $\chi^2(v) = 1$ を得て矢印の反転変換に対する対称，反対称性に応じて $\chi(v) = (-1)^{\nu''}$ なる簡単な関数にすることができる。 結局，ν'' 量子数を用いて，

$$\hat{Q}(v+iK') = (-1)^{\nu''} q^{-N/4} \exp(-\tfrac{1}{2} iN\pi v/K)\, \hat{Q}(v) \qquad (21)$$

を得る。

$\hat{Q}(v)$ は entire func. を要素とするから，対角表示をした結果の固有値 $Q(v)$ も entire である。$\hat{Q}$ の要素は $\Theta^{N-m} H^{m}$ の形をしており適当な変数の原点をとることにより $\Theta^{N/2} H^{N/2}$ の形に出き，その際(20)，(21)の周期性を考慮すれば固有値関数 $Q(v)$ は，

$$Q(v) = e^{-\frac{1}{2} i \nu \pi v/K} \prod_{j=1}^{N/2} \{\, H(v-v_j)\,\Theta(v-v_j)\,\} \qquad (22)$$

の形で表現できる。

この様に周期性と解析性（Θ, Hの零点）が固有値の形を大体決定したことになる。

νと$v_1, \ldots\ldots, v_{N/2}$は次の関係を満足する。

$$\nu + \nu' + N/2 = \text{even integer}.$$

$$K^{-1}\left\{ \tfrac{1}{2} i \nu K' - \sum_{j=1}^{N/2} v_j \right\} = \nu' + N/2 + \text{even integer}. \qquad (23)$$

かくして$\hat{Q}$を完全に決定する手段を得た。すなわち，$H(0)=0$であるから，対角表示における(17)の表現，

$$T(v)Q(v) = \phi(v-\eta)Q(v+2\eta) + \phi(v+\eta)Q(v-2\eta) \qquad (24)$$

の"v"に$v_1, \ldots, v_{N/2}$を入れると左辺は(22)により零になるので，$Q(v_j \pm 2\eta)$等に対する，すなわちv_jに対する超越代数的方程式となり，$N/2$ - 方程式系から$N/2$個のv_jを得る。これは正に，Bethe仮説を基に解く場合の一般化になっており$sn(v)$等の関数が，他のBeth仮説で解ける系の$\sin(v)$, $\sinh(v)$の代りになっているだけである。

$v_1, \ldots, v_{N/2}$が求まれば，(24)によって$T(v)$をQで表わす事ができて，$\hat{T}(v)$の固有値がすべて決定できる事になる。

ここまでは全く一般的に解いてきたが，具体的に(24)を解く場合に，必要な最大固有値を求めるに際しては，既知の模形の固有値（最大）に一致する様な極限領域で摂動展開法で求める事にする。しかし，これによって解法の厳密性は失なわ

れる事はない。なぜならBeth仮定は正しい事が示せたので，それに基づいた解法で解けている模形の解の最大固有値も正しい。

§2. $\hat{T}$-*matrix* の最大固有値と Free Energy.

今，$W_1 > W_2 > W_3 > |W_4|$ の領域に限定して固有値を考える。これは $q < x^2 < 1$，$x < z < x^{-1}$；$q \equiv e^{\pi K_k'/K_k}$，$x \equiv e^{i\pi\eta/K_k}$，$z \equiv e^{i\pi v/K_k}$；$0 < l < 1$，$|V| < \zeta < K_l$；$K_l = \frac{1}{2}(1+k)K_k'$ 等に相当するが，$H(v)$ や $\Theta(v)$ を無限乗積表示を行い，第0近似として $q \ll x^2 \ll 1$ の下で $z_j \equiv e^{i\pi v_j K_k^{-1}}$ $(j=1,\cdots,r=N/2)$ が単位円上 $|z_j| \cong 1$ に分布していると仮定し (23) を用いると，$z_1 \cdots z_r = (-1)^{r+\nu''}$ を得るが (24) から，$T(v) \cong (-1)^{\nu''}\xi^N$，$\xi \equiv i\rho\,\Theta(0)\,\gamma^2 q^{\frac{1}{4}} x^{-1}$，$\gamma \equiv \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$ を第0近似として得る。これは F-*model* [0]. の最大固有値に相当する。この解のまわりにおいて摂動展開をするが，$N \to \infty$ の条件下で無視できる項を除けば実は (24) を $T(v)$ に関して厳密に解くことができる。詳細は原論文を参照していただき結果を示すと，物理数学的な長い計算の末に，

$$-\beta f = \lim_{N\to\infty} N^{-1} \ln [T(v)]_{max}$$

$$= \ln(W_1+W_2) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh^2[(\tau-\lambda)n]\{\cosh(n\lambda) - \cosh(n\alpha)\}}{n\sinh(2n\tau)\cosh(n\lambda)} \qquad (25)$$

$\tau \equiv \pi K_l/K_{l'}$，$\lambda = \pi\zeta/K_l'$，$\alpha = \pi V/K_l'$.

§3. *Anisotropic Heisenberg Hamiltonian* と 8-vertex の $\hat{T}(v)$ の関係.

まず $\mathrm{V} = v(1+k)i^{-1}$ の変数変換をして，$\hat{T}(\mathrm{V})$から得る次の量に注目する。 $\hat{\mathcal{L}} = \hat{T}^{-1}(\zeta)\frac{d}{d\mathrm{V}}\hat{T}(\mathrm{V})\Big|_{\mathrm{V}=\zeta}$. ($\mathrm{V}=\zeta$ は $\eta = v$ に相当). (26)

これまで解かれている諸系で[0]，$\hat{T}$ と $\mathcal{H}$ が $SU(2)$ の *generator* を介して多くの場合同等になったりすることに類似して，$\hat{\mathcal{L}}$と(3)の$\mathcal{H}$が関連している事を示す。 $\vec{p} \equiv (p_1,\cdots,p_4)$, $\vec{w} = (w_1,\cdots,w_4)$ に対して変換 $\vec{p} = \frac{1}{2}\hat{I}\,\vec{w}$; $\hat{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を行うと(7)は，

$$R(\alpha,\alpha'|\lambda,\lambda') = \sum_{j=1}^{4} p_j\, \sigma^j_{\lambda\alpha'}\, \sigma^j_{\alpha\lambda'} \; . \tag{27}$$

$\mathrm{V}=\zeta$ は $p_1=p_2=p_3=0$，$p_4=2$ に相当し，$R(\alpha,\alpha';\lambda,\lambda') = 2\delta_{\lambda\alpha'}\,\delta_{\alpha\lambda'}$ となる。(5)に代入すると，

$$T_{\alpha,\alpha'} = 2^N \delta_{\alpha_1\alpha_2'}\,\delta_{\alpha_2\alpha_3'}\cdots\delta_{\alpha_N\alpha_1'} \; . \tag{28}$$

次に(5)を V で微分し，$\mathrm{V}=\zeta$ とおけば明らかに，

$$\frac{d}{d\mathrm{V}}T_{\alpha,\alpha'} = 2^{N-1}\sum_{J=1}^{N}\delta_{\alpha_1\alpha_2'}\,\delta_{\alpha_2\alpha_3'}\cdots\delta_{\alpha_{J-2}\alpha_{J-1}'}\,R^{(\prime)}(\alpha_J\alpha_J'|\alpha_{J-1},\alpha_{J+1}')\,\delta_{\alpha_{J+1}\alpha_{J+2}'}\cdots\delta_{\alpha_N\alpha_1'} \tag{29}$$

(28)から容易に $\hat{T}^{-1}(\zeta)$ を得て，(29)を用いれば，

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\sum_{J=1}^{N}\{\delta_{\alpha_1\alpha_1'}\,\delta_{\alpha_2\alpha_2'}\cdots\delta_{\alpha_{J-1}\alpha_{J-1}'}\sum_{j=1}^{4}p_j^{(\prime)}\sigma^j_{\alpha_J\alpha_J'}\,\sigma^j_{\alpha_{J+1}\alpha_{J+1}'}\,\delta_{\alpha_{J+2}\alpha_{J+2}'}\cdots\delta_{\alpha_N\alpha_N'}\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{J=1}^{N}\{p_1'\,\sigma_J^1\sigma_{J+1}^1 + p_2'\,\sigma_J^2\sigma_{J+2}^2 + p_3'\,\sigma_J^3\sigma_{J+2}^3\} + \frac{1}{2}p_4'\,N\hat{E} \tag{30}$$

$$\left(p_i' \equiv \frac{\partial}{\partial \mathrm{V}}p_i\Big|_{\mathrm{V}=\zeta}\;,\quad \hat{E}:\ \textit{identity} \right)$$

l，ζ を次の様にえらべば，

$$J_x : J_y : J_z = \mathrm{cn}\,2\zeta : \mathrm{dn}\,2\zeta : 1$$

$$\hat{H} = -J_z\,\mathrm{sn}\,2\zeta\,\{\hat{\mathcal{L}} - \tfrac{1}{2}N p_4'\hat{E}\} \tag{31}$$

$\hat{T}(v)$ の最大固有値は $0<l<1$, $0<\zeta<K_l$, $|v|<\zeta$ の条件下で得られており，$\hat{T}(v)$ の最大固有値に対応する固有ベクトルが $\hat{H}$ の最小固有値のベクトルに相当すると仮定すれば（これは既知の系では正しいが，一般には証明されてない）(26)，(31) から $\hat{H}$ の最小固有値は，

$$\Lambda_{min} = -J_z \, sn\, 2\zeta \left\{ \frac{d}{dv} \ln T(v) \Big|_{v=\zeta} - \frac{1}{2} N \, p_4' \right\} \tag{32}$$

ここで単位格子点当りの基底エネルギー F を求めると，

$$f = \lim_{N\to\infty} (2N)^{-1} \Lambda_{min} \equiv F(J_x, J_y, J_z) \tag{33}$$

$$-J_z > -J_y > |J_x|$$

$N\to\infty$ での f を (25) を用いて，結局

$$F(J_x, J_y, J_z) = \frac{1}{4} J_z + \pi J_z \, sn\, 2\zeta \, (K_l')^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh^2[n(\tau-\lambda)] \tanh(n\lambda)}{\sinh(2n\tau)} . \tag{34}$$

$F(J_x, J_y, J_z)$ は J_x, J_y, J_z の置換，例えば J_y , J_z, J_x や，符号の反転 J_y , $-J_z$, $-J_x$ に対してやはり Λ_{min} の性質を変えない。さらに，(34) の総和は $-J_z>-J_y>|J_x|$ で一様収束し，変数 J_x, J_y, J_z の解析関数になる。

§4. おわりに

以上で解法のあらすじを示したが，原論文で論じてある事で詳細に述べなかったり，省略した事は，1). F-model , free-fermion model , KDP-model , ice-model , Ising-model

等の諸関係。 2)、8-vertex modelの熱力学的諸性質（特に比熱の発散のindexがinteraction強度に依り，Kadanoffのscaling lawが破れる事。） 3). 8-vertexでa，b，c，dが各格子点で異なる非均質系の場合。 4). $F(J_x, J_y, J_z)$の$J_x = J_y$，$J_z = J_y$等の領域の境界でのFの解析性。等であるが興味のある方はぜひ原論文を参照して下さい。

楕円関数が現れた事に関してH. Araki先生からコメントがあったが，Beth仮説が用い得る系では平面波から状態ベクトルを作るので，高々sin，cos等が現われ，有限温度系でも，sinh，coshで終るが，今の系では保存量が単純でなく，特にAniso. Heisenberg-modelではΣS_i^zなる角運動量が保存せず，Bethe仮説は用い得ない。したがって，あるエネルギーが与えられた場合，$\hat{H}$の恒量がΣS_i^zではなく，全角運動量は時間的には複雑な運動をヒルベルト空間で行う。ΣS_i^zが保存される系では，それに相補的な角変数は単純な一周期的な調和運動をするであろうが，今の場合$\sum_i S_i^z$に対応するベクトルはヒルベルト空間では多周期的な運動をするものと考えられる。

現在のところ，楕円関数の出所や，他の解釈に関しては，筆者は分析不十分であり数学諸氏に御教示いただきたい。

最近固有ベクトルの具体的表現がBaxter[2)]により得られたがこれに関しては他の機会にゆずることにする。

REFERENCE

0). a) Fundamental Problems in Statistical Mechanics II
(edited by E.G.D.Cohen,North-Holland,1968)
"Phase Transition" P.W.Kasteleyn.

b) Mathematical Methords in Solid State &Superfluid Theory (edited by Clark,Derrick,Oliver&Boyd)
Review article by E.H.Lieb.

c) See also the articles refered in Baxter's one.

1). a) R.J.Baxter ,Phys. Rev. Let. Vol. 26,No.14,832, 834, (1971)

b) R.J.Baxter ,Annals of Physics(New York),Vol.70, 193-228, (1972) full paper of 8-vertex.

c) R.J.Baxter ,preprint, full paper of Anisotropic Heisenberg Model.

2). a) R.j.Baxter ,Preprint, Eight Vertex Model in Lattce Statistics and One-Dimensional Anisotropic Heisenberg Chain. III. (Eigen Vectors of The Transfer Matrix and Hamiltonian.)May,1972.